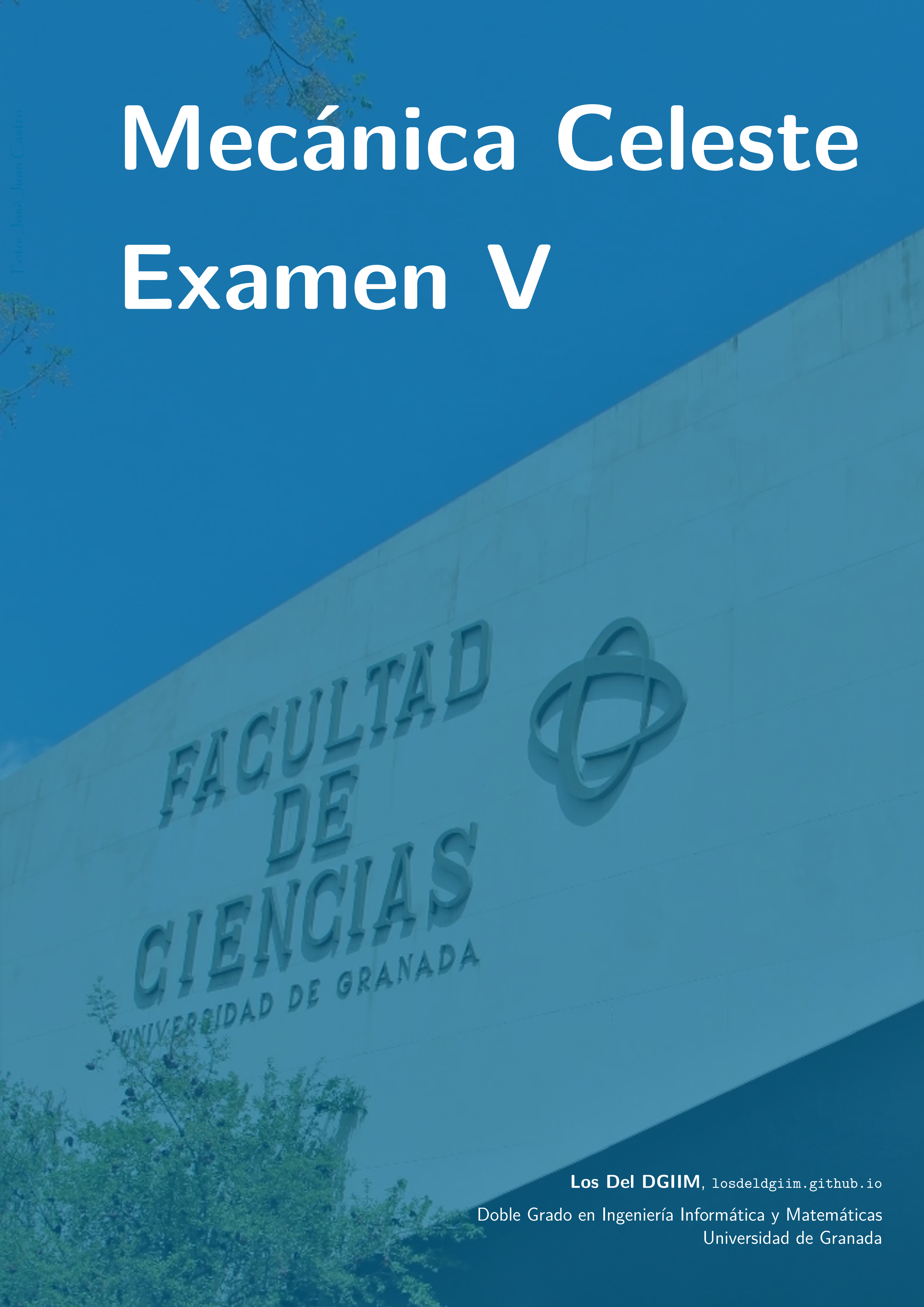

Foto: José Juan Castro

Mecánica Celeste

Examen V

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Mecánica Celeste
Examen V

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2025

Asignatura Mecánica Celeste.

Curso Académico 2024-25.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo A.

Profesor Margarita Arias López.

Descripción Segundo Parcial.

Fecha 13 de Diciembre de 2024.

Duración 1 hora y 30 minutos.

El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio o apartado.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Pon un ejemplo razonado de un problema de dos cuerpos

a) [1] en el que las dos masas colisionen, pero que el movimiento no se produzca en una recta.

b) [1] en el que las dos masas se muevan sobre una circunferencia.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Se consideran tres masas iguales, $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3G$, situadas inicialmente en los puntos $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ y $P_3 = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$.

a) [1] ¿A qué velocidad angular tiene que girar el conjunto para que las funciones $r_i(t) = R[\omega t]P_i, i = 1, 2, 3$ constituyan una solución del problema de los tres cuerpos?[1]

b) [1] En las condiciones del apartado anterior, determina $\dot{r}_i(0), i = 1, 2, 3$.

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** En el ejercicio anterior, suponemos que las velocidades iniciales de las masas son $\dot{r}_1(0) = (0, 1/3)$, $\dot{r}_2(0) = (-\sqrt{3}/6, -1/6)$ y $\dot{r}_3(0) = (\sqrt{3}/6, -1/6)$.

a) [1] Comprueba que el centro de masas permanece fijo en el origen.

b) [1] ¿Se puede producir el movimiento sobre una circunferencia?

c) [1] ¿Puede haber colapso total?

d) [1] Explica de forma intuitiva lo que crees que puede suceder en este caso.

[1] Como es habitual, denotamos por $R[\theta]$ a la matriz del giro de ángulo θ

Ejercicio 4 (2 puntos). La Figura 1

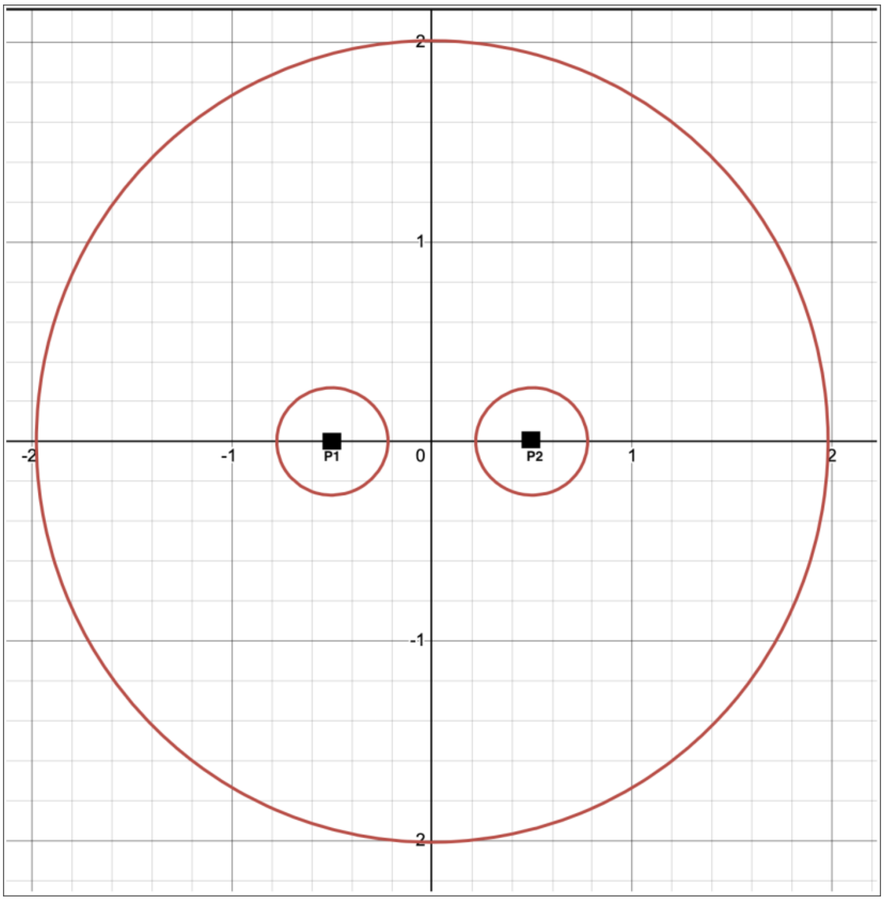

Figura 1: Situación Inicial del Ejercicio 4

representa $\{z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\} : \Phi(z) = C\}$ para cierto valor de $C > 0$, con

$$2\Phi(z) = |z|^2 + |P_1 - z|^{-1} + |P_2 - z|^{-1} + 1/4,$$

correspondiente al problema restringido circular con dos primarias de masas iguales.

a) [1] ¿Dónde colocarías un satélite y con qué velocidad inicial para asegurarte de que no se separa de la primaria situada en P_2?

b) [1] ¿Y si lo que quieres es que no se acerque a ninguna de las primarias?

Razona tus respuestas.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Pon un ejemplo razonado de un problema de dos cuerpos

a) [1] en el que las dos masas colisionen, pero que el movimiento no se produzca en una recta.

Consideramos el centro de masas fijo inicialmente, así como $m_1 = m_2 = m > 0$. Entonces, por teoría sabemos que cada cuerpo sigue una trayectoria propia de un campo de fuerzas central newtoniano:

$$\ddot{x} = -\mu \frac{x}{|x|^3}, \quad \mu = G\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2} = G\frac{m^3}{4m^2} = \frac{Gm}{4} \tag{1}$$

Además sabemos que $y(t) = -x(t)$ (por estar el centro de masas fijo en el origen). Sea $e = (0,1,0)$ y sea el instante de colisión $\omega = 1$. Definimos, para $I = [0, \omega[$

$$\begin{aligned} r: \ I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto r(t) \stackrel{def}{=} \left(\frac{9}{2}\mu\right)^{1/3} (1-t)^{2/3} \end{aligned}$$

de tal manera que $x(t) = r(t)e$ e $y(t) = -x(t) = -r(t)e$

Entonces $x(t) = r(t)e \to 0$ cuando $t \to \omega$, y análogo con $y(t)$. Además, $r(t)$ verifica (1)

$$\dot{r}(t) = -\frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}\mu\right)^{1/3}(1-t)^{-1/3}$$

$$\ddot{r}(t) = \left[-\frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}\mu\right)^{1/3}\right]\frac{1}{3}(1-t)^{-4/3} = -\frac{2}{9}\left(\frac{9}{2}\mu\right)^{1/3}(1-t)^{-4/3}$$

$$r(t)^2 = \left(\frac{9}{2}\mu\right)^{2/3}(1-t)^{4/3}$$

y

$$-\frac{\mu}{r(t)^2} = -\mu \cdot \left(\frac{9}{2}\mu\right)^{-2/3}(1-t)^{-4/3}$$

Ahora, vemos que

$$\mu \cdot \left(\frac{9}{2}\mu\right)^{-2/3} = \mu^{1-2/3}\left(\frac{9}{2}\right) = \mu^{1/3}\left(\frac{2}{9}\right)^{2/3}$$

y como

$$\left(\frac{2}{9}\right)^{2/3} = \frac{2^{2/3}}{9^{2/3}} = \frac{2^{2/3}}{3^{4/3}} = \frac{2^1}{3^2}\frac{2^{2/3-1}}{3^{4/3-2}} = \frac{2}{9}\frac{2^{-1/3}}{3^{-2/3}} = \frac{2}{9}\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}$$

tenemos que

$$\mu \cdot \left(\frac{9}{2}\mu\right)^{-2/3} = \mu^{1/3}\left(\frac{2}{9}\right)^{2/3} = \mu^{1/3}\frac{2}{9}\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3} = \frac{2}{9}\left(\frac{9}{2}\mu\right)^{1/3}$$

por lo que, juntando todo

$$-\mu\frac{r(t)}{|r(t)|^3} \overset{(*)}{=} -\frac{\mu}{r(t)^2} = -\mu\cdot\left(\frac{9}{2}\mu\right)^{-2/3}(1-t)^{-4/3} = -\frac{2}{9}\left(\frac{9}{2}\mu\right)^{1/3}(1-t)^{-4/3} = \ddot{r}(t)$$

donde en $(*)$ se ha usado que $r(t) > 0$ si $t \in I$. Comprobamos ahora que $x = x(t)$ es solución de (1)

$$\ddot{x}(t) = \ddot{r}(t)e = -\frac{\mu}{r(t)^2}e = -\mu\frac{r(t)e}{r(t)^3} = -\mu\frac{x(t)}{|x(t)|^3}$$

donde se ha usado que $|x(t)| = |r(t)e| = |r(t)||e| \overset{|e|=1}{=} |r(t)| = r(t)$, y esto último por lo mismo que se ha utilizado en $(*)$.

Entonces, para que el movimiento no quede contenido en una recta, pero se mantenga la colisión, usamos el Principio de Relatividad de Galileo. Tomando $\alpha = 0, \beta = (1,0,0) \nparallel (0,1,0) = e, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$, se tiene que

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \alpha + \beta t = r(t)e + \alpha + \beta t = (t, r(t), 0)$$

$$\tilde{y}(t) = y(t) + \alpha + \beta t = -r(t)e + \alpha + \beta t = (t, -r(t), 0)$$

Como $(\tilde{x} - \tilde{y})(t) = (0, 2r(t), 0) \to 0$ cuando $t \to \omega$, puesto que $r(t) \to 0$ cuando $t \to \omega$, se sigue produciendo la colisión, pero las trayectorias de cada cuerpo ya no son rectilíneas, porque la velocidad es $\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{r}(t)e + \beta$, y como $\dot{r}(t)$ depende del tiempo (no es constante), la dirección del vector velocidad cambia con t, y consecuentemente las trayectorias de cada cuerpo no estarán contenidas en ninguna una recta, y lo mismo ocurre con $\dot{\tilde{y}}(t) = -\dot{r}(t)e + \beta$.

Nótese que ya no es cierto que $\tilde{y}(t) = -\tilde{x}(t)$, dado que antes el centro de masas estaba fijo en el origen, pero ahora $\tilde{C}(t) = C(t) + \alpha + \beta t = \alpha + \beta t$, con $\beta = (1,0,0) \neq 0$.

b) [1] en el que las dos masas se muevan sobre una circunferencia.

Volvemos a considerar $m_1 = m_2 = m > 0$, y trabajamos con el centro de masas en el origen ($C(t) \equiv 0$). Entonces $y(t) = -x(t)$. Nuevamente tenemos un problema de Kepler como en el apartado anterior

$$\ddot{x} = -\mu \frac{x}{|x|^3}, \quad \mu = \frac{Gm}{4}$$

Ahora buscamos una órbita circular de radio r, de la forma $x_r(t) = r(\cos(\omega t), \operatorname{sen}(\omega t))$ y sabemos que $x_r(t)$ es solución de $\ddot{x} = -\mu x/|x|^3$ si y solo si

$$|\omega| = \frac{\sqrt{\mu}}{r^{3/2}}$$

Para hacer las cuentas lo más sencillas posibles, tomamos $r = 1$, e imponemos

$$\mu = 1 \iff \frac{Gm}{4} = 1 \iff m = \frac{4}{G}$$

De esta manera, podemos considerar las soluciones en el plano (por la invarianza frente a isometrías de las soluciones)

$$x(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

$$y(t) = -x(t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t)$$

Entonces, ambas masas se mueven sobre la misma circunferencia de radio 1 centrada en el origen (en el que se encuentra el centro de masas fijo).

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Se consideran tres masas iguales, $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3G$, situadas inicialmente en los puntos $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ y $P_3 = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$.

a) [1] ¿A qué velocidad angular tiene que girar el conjunto para que las funciones $r_i(t) = R[\omega t]P_i, i = 1,2,3$ constituyan una solución del problema de los tres cuerpos?[2]

Buscamos aplicar el teorema siguiente:

Teorema 0.1. *Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$ tres puntos no alineados. Entonces*

$$r_i(t) = R[\omega t]z_i, \quad i = 1,2,3$$

es solución del problema de tres cuerpos si y solo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

a) El centro de masas está en el origen, es decir,

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0$$

b) Los puntos z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero de lado $d > 0$.

c) $|\omega| = \sqrt{\dfrac{GM}{d^3}}, \quad M = m_1 + m_2 + m_3$

Los dos primeros apartados deberán cumplirse con los datos dados, y el tercero nos dará la velocidad angular que nos piden. Denotamos por $z_i \overset{not}{=} P_i$ a cada punto del Teorema 0.1:

a) Trivialmente

$$\frac{1}{3}((1,0) + (-1/2, \sqrt{3}/2) + (-1/2, -\sqrt{3}/2)) = \frac{1}{3}G(0,0) = (0,0)$$

b) Hay que comprobar que las longitudes de los tres lados del triángulo sean iguales.

$$|P_3 - P_1| = |(-1/2, -\sqrt{3}/2) - | = |(-3/2, -\sqrt{3}/2)| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

$$|P_3 - P_2| = |(-1/2, -\sqrt{3}/2) - (-1/2, \sqrt{3}/2)| = |(0, -\sqrt{3})| = \sqrt{3}$$

$$|P_2 - P_1| = |(-1/2, \sqrt{3}/2) - (1,0)| = |(-3/2, \sqrt{3}/2)| = |(-3/2, -\sqrt{3}/2)| = |P_3 - P_1| = \sqrt{3}$$

[2]Como es habitual, denotamos por $R[\theta]$ a la matriz del giro de ángulo θ

c) Y por último

$$|\omega| = \sqrt{\frac{GM}{d^3}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}^3}} = \sqrt{\frac{1}{3\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{9}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{3} = 3^{-3/4}$$

Por lo tanto, en módulo, la velocidad angular a la que debe girar el conjunto para llegar a la solución del problema de los tres cuerpos es

$$\boxed{|\omega| = 3^{-3/4}}$$

b) [1] En las condiciones del apartado anterior, determina $\dot{r}_i(0), i = 1, 2, 3$.

Ya sabemos por el apartado anterior que $r_i(t) = R[\omega t]P_i, i = 1, 2, 3$, y además sabemos que $\dot{r}_i(t) = \omega JR[\omega t]P_i = \omega J r_i(t)$, con $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En $t = 0$, $\dot{r}_i(0) = \omega J P_i$, de donde

1. $\dot{r}_1(0) = \omega J P_1 = \omega J(1, 0) = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (1, 0) = \omega(0, 1)$
2. $\dot{r}_2(0) = \omega J P_2 = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (-1/2, \sqrt{3}/2) = \omega(-\sqrt{3}/2, -1/2)$
3. $\dot{r}_3(0) = \omega J P_3 = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (-1/2, -\sqrt{3}/2) = \omega(\sqrt{3}/2, -1/2)$

Se ha supuesto que $|\omega| = \omega$, es decir, $\omega = 3^{-3/4}$.

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** En el ejercicio anterior, suponemos que las velocidades iniciales de las masas son $\dot{r}_1(0) = (0, 1/3)$, $\dot{r}_2(0) = (-\sqrt{3}/6, -1/6)$ y $\dot{r}_3(0) = (\sqrt{3}/6, -1/6)$.

a) [1] Comprueba que el centro de masas permanece fijo en el origen.

Por definición, el centro de masas en el problema de los n cuerpos es

$$C(t) \overset{def}{=} \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i(t) \quad M = \sum_{j=1}^{n} m_j$$

Para $n = 3$, y las condiciones anteriores, vemos que

$$C(t) = \frac{1}{\cancel{3}\cdot\left(\frac{1}{\cancel{3}G}\right)}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i(t) = \cancel{G}\cdot\left(\frac{1}{3\cancel{G}}\left((1,0) + \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right) =$$

$$\frac{1}{3}(0,0) = (0,0)$$

Por tanto, el centro de masas permanece fijo en el origen.

b) [1] ¿Se puede producir el movimiento sobre una circunferencia?

Para que el movimiento se desarrolle sobre una circunferencia, debe verificarse $\dot{r}_i(0) = \omega J P_i$ con $i = 1, 2, 3$ para un mismo ω. Para ver si tal ω existe, usaremos los $JP_i, i = 1, 2, 3$ obtenidos en el ejercicio anterior y veremos si con las velocidades iniciales dadas ω verifica las tres igualdades.

1. $JP_1 = (0, 1) \Longrightarrow \dot{r}_1(0) = (0, 1/3) = \omega(0, 1) \Longrightarrow \omega = 1/3$
2. $JP_2 = (-\sqrt{3}/2, -1/2) \Longrightarrow \dot{r}_2(0) = (-\sqrt{3}/6, -1/6) = \omega(-\sqrt{3}/2, -1/2) \Longrightarrow \omega = 1/3$
3. $JP_3 = (\sqrt{3}/2, -1/2) \Longrightarrow \dot{r}_3(0) = (\sqrt{3}/6, -1/6) = \omega(\sqrt{3}/2, -1/2) \Longrightarrow \omega = 1/3$

Sin embargo, con estas velocidades, $|\omega| = 1/3$, que no coincide con $|\omega| = 3^{-3/4}$, que es la condición para que tengamos una solución al problema de los tres cuerpos. Por lo tanto, podemos concluir lo siguiente:

Las velocidades iniciales son compatibles con un movimiento circular rígido (en sentido cinemático), pues existe $\omega = \frac{1}{3}$ tal que $\dot{r}_i(0) = \omega J P_i,\ i = 1, 2, 3$. Sin embargo, dicho movimiento no es solución del problema de los tres cuerpos, ya que la condición $|\omega| = \sqrt{\frac{GM}{d^3}} = 3^{-3/4}$ no se cumple.

c) [1] ¿Puede haber colapso total?

Buscamos aplicar el Teorema de Sundman, ya que por el apartado a) sabemos que $C(t) \equiv 0$ (permanece fijo en el origen):

Teorema 0.2. *Sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ una solución del problema de n cuerpos con centro de masas fijo en el origen y una colisión (colapso) total. Entonces su momento angular es $c = 0$.*

Si el momento angular del problema no es cero, entonces no podrá producirse una colisión total.

Por definición, el momento angular en el problema de los n cuerpos es

$$c \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i (r_i \wedge \dot{r}_i)$$

También sabemos que se verifica la conservación del momento angular en el problema de los n cuerpos, por lo que basta calcularlo en algún instante de tiempo. En este caso, usaremos $t = 0$.

1. $(1,0) \wedge (0,1/3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = 1/3k = (0,0,1/3)$
2. $(-1/2, \sqrt{3}/2) \wedge (-\sqrt{3}/6, -1/6) = \begin{vmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/6 & -1/6 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (0,0,1/3)$
3. $(-1/2, -\sqrt{3}/2) \wedge (\sqrt{3}/6, -1/6) = \begin{vmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/6 & -1/6 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (0,0,1/3)$

$$c = \left(0, 0, \frac{1}{\cancel{3}G} \cdot (\cancel{3} \cdot 1/3)\right) = \left(0, 0, \frac{1}{G} \cdot \frac{1}{3}\right) = \left(0, 0, \frac{1}{3G}\right) \neq 0$$

Así pues, por el Teorema 0.2, no puede haber colapso total.

d) [1] Explica de forma intuitiva lo que crees que puede suceder en este caso.

Inicialmente, las velocidades hacen que el sistema empiece a girar de forma similar a una rotación rígida alrededor del centro de masas. Sin embargo, como la velocidad angular no satisface la condición del módulo del Teorema 0.1, para ser solución al problema de los tres cuerpos, el triángulo no permanece rígido: las distancias entre las masas varían con el tiempo, produciéndose una deformación progresiva de la configuración inicial. El movimiento se asemeja inicialmente al de un triángulo girando, pero dicha rotación no se mantiene de forma estable.

Ejercicio 4. La Figura 1

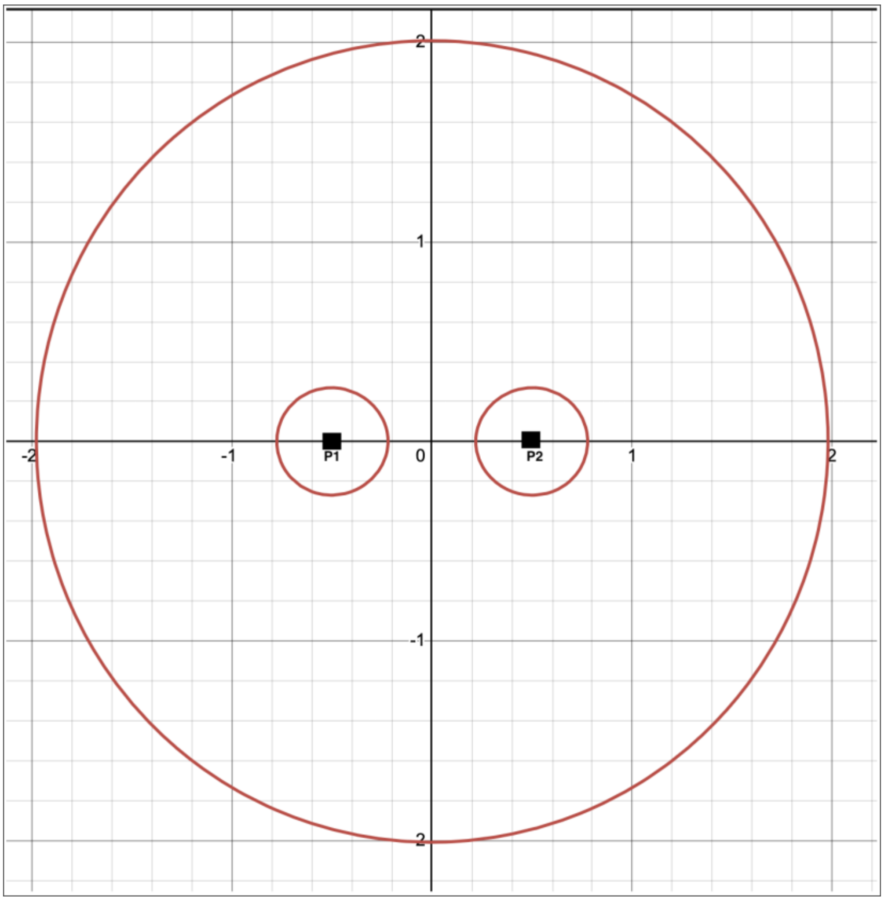

Figura 2: Situación Inicial del Ejercicio 4

representa $\{z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\} : \Phi(z) = C\}$ para cierto valor de $C > 0$, con

$$2\Phi(z) = |z|^2 + |P_1 - z|^{-1} + |P_2 - z|^{-1} + 1/4,$$

correspondiente al problema restringido circular con dos primarias de masas iguales.

a) [1] ¿Dónde colocarías un satélite y con qué velocidad inicial para asegurarte de que no se separa de la primaria situada en P_2?

Usaremos las regiones de Hill para abordar el problema, que se muestran en la Figura 3

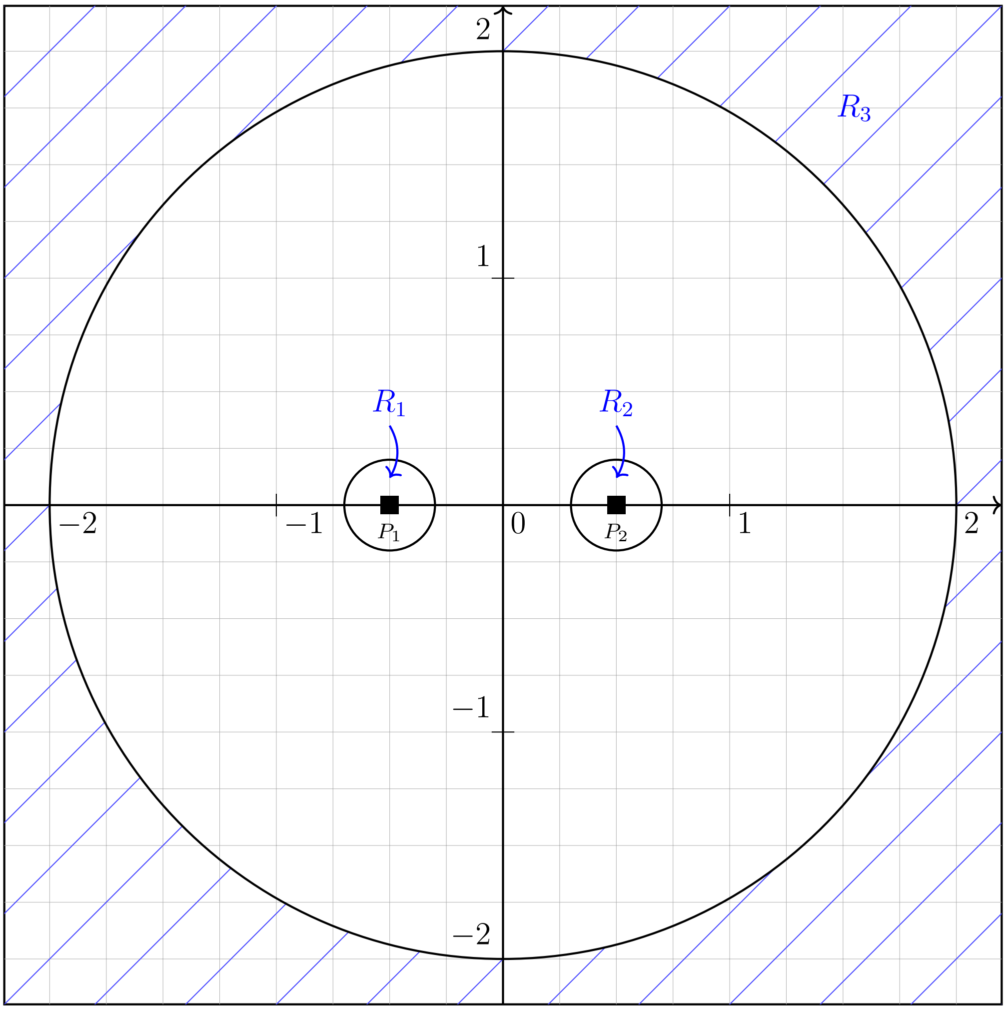

Figura 3: Regiones de Hill del Ejercicio 4

Por definición de región de Hill asociada a un nivel $C > 0$

$$R(C) = \{z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\} : \Phi(z) \geqslant C\}$$

y por la definición de la constante de Jacobi de una solución $z = z(t)$ del problema restringido circular, definida en un intervalo maximal I, que es $\mathcal{J} = 2\Phi(z(t)) - |\dot{z}(t)|^2 = cte$, entonces como $|\dot{z}(t)|^2 \geqslant 0$, se tiene que $2\Phi(z(t)) \geqslant \mathcal{J}$. Fijando como condición inicial $z(0) = z_0$ y $v = \dot{z}(0)$, entonces $\mathcal{J} = 2\Phi(z(0)) - |v|^2$. Ahora,

$$2\Phi(z(t)) \geqslant \mathcal{J} = 2\Phi(z(0)) - |v|^2 \quad \forall t \in I \iff \Phi(z(t)) \geqslant \Phi(z(0)) - |v|^2/2$$

luego

$$z(t) \in R\left(\Phi(z(0)) - \frac{|v|^2}{2}\right)$$

Ahora bien, las componentes conexas de la Región de Hill (en este caso hay tres) son R_1, R_2 y R_3. Sabemos por teoría que la trayectoria permanece en la componente conexa donde empieza.

Como R_2 es una componente conexa, por el razonamiento anterior,

$$z(t) \in R_2 \quad \forall t \in I$$

tomando $z_0 \in R_2$ y $\dot{z}(0) = 0$ (se suelta en reposo), de tal manera que el satélite no puede separarse de la primaria situada en P_2.

b) [1] ¿Y si lo que quieres es que no se acerque a ninguna de las primarias?

Procederemos de forma similar, pero con R_3. Ubicando el satélite con las mismas condiciones iniciales, $z(0) = z_0 \in R_3, \quad \dot{z}(0) = 0$, entonces

$$z(t) \in R_3 \quad \forall t \in I$$

Como puede verse en la Figura 3, R_3 está separada de P_1 y de P_2, luego $\exists \delta > 0$ (basta tomar el mínimo entre las dos distancias) tal que

$$|z - P_1| \geqslant \delta \quad |z - P_2| \geqslant \delta \quad \forall z \in R_3$$

Consecuentemente

$$|z(t) - P_1|, |z(t) - P_2| \geqslant \delta \quad \forall t \in I$$

puesto que R_3 es una componente conexa, por lo que el satélite no se aproxima a ninguna de las dos primarias.